Sürekli Düzgün Dağılım (Uygulama).

X t.d.-nin olasılık yoğunluk dağ.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a \le x \le b \\ 0, & d.d. \end{cases}$$

$$E(X) = \frac{a+b}{2}, \quad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Örnek

Bir otobüs durağına saat 10.00 da geldiğimizi varsayalım. Bu durağa otobüs saat 10.00 ile 10.30 arasında düzgün dağılıma uygun herhangi bir saatte gelmektedir. Buna göre,

a) Otobüsün gelmesi için 10 dk'dan fazla bekleme olasılığını hesaplayınız.

b) Eğer saat 10.15 ve otobüs hala gelmemiş ise, en az 10 dk daha bekleme olasılığı nedir?

X : Otobüsün gelmesi için beklediğimiz süre

a) $P(X > 10{:}10) = \int_{x=10:10}^{10:30} \frac{1}{30} \, dx \Rightarrow \frac{1}{30} \cdot x \Big|_{10}^{30}$

$= 1 - \frac{10}{30} = \frac{2}{3}$

$= \%67$

b) $P(X>25 / X>15) = \dfrac{P(X>25)}{P(X>15)}$, $P(B/A) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$

$$= \frac{\int_{25}^{30} \frac{1}{30}\,dx}{\int_{15}^{30} \frac{1}{30}\,dx}$$

$$= \frac{x \cdot \frac{1}{30}\Big|_{25}^{30}}{x \cdot \frac{1}{30}\Big|_{15}^{30}} = \frac{1-\frac{25}{30}}{1-\frac{15}{30}} = \frac{5/30}{15/30} = \frac{1}{3}$$

ÖRNEK *

X, r.d. (0,1) aralığında bir düzgün tesadüfi değ. olsun. $E(X^n)$ değerini hesaplayın.

$$E(X^n) = \int_0^1 x^n \cdot \frac{1}{1} \cdot dx$$

$$= \int_0^1 x^n \cdot dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Bigg|_0^1$$

$$E(X^n) = \frac{1}{n+1} - 0 = \frac{1}{n+1}$$ olur.

[illegible]

$E(X) = \dfrac{1}{2}$, $E(X^2) = \dfrac{1}{3}$ $V(X) = \dfrac{1}{12}$

2- A takımının yaptığı bir maçı kazanma olasılığı $\frac{2}{3}$ dır. 4 maç yapılıyor.

a.) A'nın 2 maçı kazanma olasılığını bulunuz

b.) En az bir maçı kazanma olasılığı,

c.) Maçların yarıdan fazlasını kazanma olasılığını bulunuz.

Çözüm: $n=4$ maç

X: A takımının maç kazanma sayısı olsun.

X, t.d. binom dağılımına sahiptir.

a.) $p(x=2)=\binom{n}{x}\cdot p^x\cdot q^{n-x}$

$$=\binom{4}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{27}$$

b.) En az bir maçı kazanma olasılığı,

$$p(x\geq 1)=1-\underbrace{p(x=0)}_{\text{hiç kazanmama olasılığı}}$$

$$=1-\binom{4}{0}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^0\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^4=1-\frac{1}{81}=\frac{80}{81}$$

c.) Maçların yarıdan fazlasını kazanma olasılığı,

$$P(x>2)=p(x=3)+p(x=4)$$

$$=\binom{4}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^1+\binom{4}{4}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^0$$

$$=4\cdot\frac{8}{27}\cdot\frac{1}{3}+\frac{16}{81}=\frac{32}{81}+\frac{16}{81}=\frac{48}{81}=\frac{16}{27}$$

3.) Bir zar deneyinde, 6'lı yüzü elde etmeme olasılığının, bir zarla çift sayı elde etme olasılığından küçük olması için en az kaç tane zar atılmalıdır.

Çözüm: Zar deneyinde 6'lı elde etmeme olasılığı, $p=\frac{5}{6}$

n tane zarda $\left(\frac{5}{6}\right)^n$ olur

Zarda çift sayı elde etme olasılığı,
$p(2, 4 \text{ veya } 6) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ dır.

İstenen,

$\left(\frac{5}{6}\right)^n < \frac{1}{2}$ eşitsizliğini sağlayan en küçük n değeri,

$\left(\frac{5}{6}\right)^1 = \frac{5}{6} \not< \frac{1}{2}$

$\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{36} \not< \frac{1}{2}$

$\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216} \not< \frac{1}{2}$

$\left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{1296} < \frac{1}{2}$ sağlanmış olur.

Böylece zar en az 4 kere atılmalıdır.

4.) Bir kimsenin hedefi vurma olasılığı $\frac{1}{4}$,

a.) Hedefe 7 atış yapılırsa en az 2 kez vurma olasılığı?

b.) Hedefi en az bir kez vurma olasılığının $\frac{2}{3}$'den büyük olması için en az kaç atış yapılmalıdır? ÖDEV

5.) $p(x) = \begin{cases} 2k.x & , x = 1,2,3 \\ k.(1+2x) & , x = 4,5,6,7 \\ 0 & , \text{d.h.} \end{cases}$

$p(x)$, olasılık fonksiyonu olması için $k = ?$

Çözüm: $\sum_{x=-\infty}^{\infty} p(x) = 1$ olmalı.

$\Rightarrow \sum_{x=1}^{3} 2.k.x + \sum_{x=4}^{7} k.(1+2x) = 1$

$\Rightarrow 2k.(1+2+3) + k.(9+11+13+15) = 1$

$\Rightarrow 12.k + 48.k = 1$

$\Rightarrow k = 1/60$

$k = \frac{1}{60}$ için o.f.

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{30} \cdot x &, x = 1,2,3 \\ \frac{1}{60} \cdot (1+2x) &, x = 4,5,6,7 \\ 0 &, \text{d.h.} \end{cases}$$

ilave olarak, $V[(2x-2)^2]$ ve X'in m.ç.f. bulunuz.

6.) 1'den 10'a kadar tamsayılar arasından tesadüfi olarak çekilen herhangi bir sayının bölen sayısı X t.d. olsun. X'in Karakteristik fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm: X: çekilen herhangi bir sayının bölen sayısı olsun,

Tam sayılar	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Bölen sayısı	1	2	2	3	2	4	2	4	3	4

X, t.d. nin o.f. nu şöyledir:

$X = x_i$	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	1/10	4/10	2/10	3/10

olur.

$$\Rightarrow \Phi_x(t) = E(e^{itx}) = \sum_{x=1}^{4} e^{itx} \cdot p(x_i)$$

$$= e^{it} \cdot \frac{1}{10} + e^{2it} \cdot \frac{4}{10} + e^{3it} \cdot \frac{2}{10} + e^{4it} \cdot \frac{3}{10}$$

7.) X ve Y birbirinden bağımsız ve binom dağılımına sahip t.d. ler olsun. $X \sim b(n_1, p)$, $Y \sim b(n_2, p)$ ise $(X+Y)$ t.d. nin dağılımı nedir.

Çözüm: X t.d. için $f(x) = \sum_x \binom{n_1}{x} \cdot p^x \cdot q^{n_1 - x}$

Y için $f(y) = \sum_y \binom{n_2}{y} \cdot p^y \cdot q^{n_2 - y}$ olur.

$$\sum_x \binom{n_1}{x} \cdot \sum_y \binom{n_2}{y} = \sum_{x+y} \binom{n_1+n_2}{x+y}$$ ve

X ve Y bağımsız,

$$f(x+y) = \sum_{x+y} \binom{n_1+n_2}{x+y} \cdot p^{x+y} \cdot q^{n_1+n_2-(x+y)}$$

olduğundan

$$\left.\begin{matrix} X \sim b(n_1, p) \\ Y \sim b(n_2, p) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \underline{X+Y \sim b(n_1+n_2, p)} \text{ olur.}$$